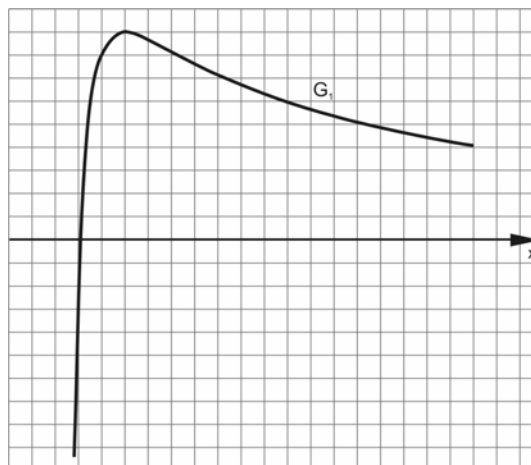


Wolfram Eid, Magdeburg

Gedanken zur Gestaltung von Aufgaben für zentrale Abiturprüfungen

Gegeben sind die Funktionen f_a in ihrem größtmöglichen Definitionsbereich durch $y = f_a(x) = 3 \cdot \frac{\ln x + a}{e^{1-a} - x}$, $a \in \mathbb{R}$. Ihre Graphen seien G_a mit den Hochpunkten $H_a(e^{1-a} | f_a(e^{1-a}))$.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_1 in einem unvollständigen kartesischen Koordinatensystem.



Ergänzen Sie in der Abbildung die Ordinatenachse, ermitteln Sie die Skalierung der Koordinatenachsen und zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte der Graphen G_a ein.

Nennen Sie Schritte zum Ermitteln des Wertebereichs der Funktionen f_a .

Die oben vorgestellte Aufgabe war Bestandteil einer Prüfungsaufgabe im Abiturjahrgang 2006 (Grundkursniveau) in Sachsen-Anhalt. Ihre Bearbeitung bereitete den Prüflingen vermehrt Schwierigkeiten und führte zu recht breiter öffentlicher Diskussion, die jedoch die Besonderheiten der nachhaltigen Umstellungen im Schulsystem gerade in diesem Schuljahrgang völlig ausblendete. Dennoch war sie Anlass zu gründlicher Auseinandersetzung der Autorengruppe, verbunden mit breiter Reflektion über die Facetten der Gestaltung von Prüfungsaufgaben oder auch prüfungsnaher Aufgaben. Insbesondere standen zwei Themenkreise im Fokus des Interesses:

- Möglichkeiten der Gestaltung verschiedenartiger Aufträge
- Umreißen des Anspruchsniveaus für „gute“ Prüfungsaufgaben.

Bez. des ersten Aspektes eröffnet sich sofort ein weites Feld. Einige Ansätze, die sofort ins engere Zentrum der Diskussion rücken, sind sicher die folgenden:

- (A) formale Aufgaben – Anwendungsaufgaben
- (B) innermathematische Aufgaben – außermathematische Aufgaben
- (C) überbestimmte oder unterbestimmte Aufgaben
- (D) Aufgabentypen nach PISA: technische, rechnerische, begriffliche
- (E) „Aufgabenformate“ nach PISA

- (F) „Aufgabenziel“ (z. B. Aufgaben zur Kontrolle des Verständnisses von Begriffen, Sätzen und Verfahren; Aufgaben zur Kontrolle inhaltsbezogener oder allgemeiner mathematischer Kompetenzen)
- (G) Aufgaben, die eine verbal sprachliche Darstellung erfordern (Signalwörter wie „Erläutern ...“, „Beschreiben ...“, „Interpretieren ...“)
- (H) präferierte Lösungsverfahren oder Strategien (algorithmisch; kalkülmäßig; heuristisch; Strategien wie Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten, Analogisieren; Konstruieren oder Berechnen)

Die derzeitige Struktur des Unterrichts in den Kernfächern in der Qualifikationsphase und die darauf aufbauende Gestaltung von Prüfungsaufgaben in Sachsen-Anhalt geben jedoch Anlaß zu weit filigranerer Arbeit am Aufgabensujet, als gemeinhin vermutet wird. Nach gemeinsam durchlaufenem Unterricht treffen die Prüflinge eine Entscheidung über die von Ihnen angestrebte Wertigkeit des erreichten Ergebnisses. Entsprechend dieser lösen sie dann am Prüfungstag Aufgaben auf Grundkursniveau oder auf Leistungskursniveau. Wegen der gemeinsamen Vorgeschichte aller Lernenden wird danach getrachtet, beiden durch die Wahl einheitlicher Sujets gerecht zu werden und Unterschiede durch geeignetes Verändern (nicht nur Erweitern) zu entwickeln. Das nachfolgende Beispiel eines „Paares“ von Prüfungsaufgaben verdeutlicht dies.

Grundkursniveau:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC gegeben:

$$A(3 \mid 2), B(4 \mid 9) \text{ und } C(1 \mid 8).$$

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und ermitteln Sie eine Gleichung seines Umkreises k .

Es gibt einen weiteren Punkt C_1 auf dem Kreis k , für den die Inhalte der Flächen der Dreiecke ABC und ABC_1 gleich groß sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C_1 .

Leistungskursniveau

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD durch die Eckpunkte gegeben:

$$A(1 \mid 8), B(3 \mid 2), C(7 \mid 5) \text{ und } D(4 \mid 9).$$

Die Innenwinkel des Vierecks ABCD werden mit α , β , γ und δ bezeichnet.

- a) Das Gradmaß des Winkels γ beträgt 90° .

Zeigen Sie, dass auch der Winkel α ein rechter Winkel ist und begründen Sie, dass das Viereck ABCD einen Umkreis hat.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieses Umkreises k .

Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Vierecksfläche.

- b) Es gibt einen weiteren Punkt A_1 auf dem Umkreis k , für den die Inhalte der Flächen der Vierecke ABCD und A_1BCD gleich groß sind.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes A_1 .

Mithin erhebt sich die Frage, in welcher Weise Varianten kreiert werden könnten. Neben der groben Unterscheidung aus mathematischer Sicht von Bestimmungs- bzw. Beweisaufgaben können diese Kategorien nachfolgend noch einmal in innermathematische und außermathematische Aufgaben unterteilt werden. Tiefer gehender sind in Anlehnung an *Bruder* Überlegungen zu den eine Aufgabe kennzeichnenden Komponenten:

Anfangssituation: Voraussetzungen, gegebene Größen, Informationen zu einem Sachverhalt usw.

Transformationen: Überführung der Anfangssituation in die Endsituation vom Gegebenen hin zum Gesuchten: Lösungsweg(e), mathematische Modelle, Beweiskette usw.

Endsituation: Gesuchtes, Behauptung, Schlussfolgerungen, Resultate usw.

Durch Kombination dieser drei Komponenten können acht Aufgabentypen charakterisiert werden¹:

	Anfangssituation GEGEBENES	Transformationen LÖSUNGSWEG	Endsituation GESUCHTES	Kurzbeschreibung
1	x	x	x	gelöste Aufgabe (Stimmt das?)
2	x	x	-	„einfache“ Bestimmungsaufgabe
3	-	x	x	„einfache“ Umkehraufgabe
4	x	-	x	Beweisaufgabe
5	x	-	-	„schwere“ Bestimmungsaufgabe
6	-	-	x	„schwere“ Umkehraufgabe
7	-	x	-	Anforderung, eine Aufgabe zu erfinden
8	-	-	(-)	offene Problemsituation

¹ x bedeutet, dass das Element vorgegeben wird.

Durch Beachtung der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich mögliche Aufgabenvariationen, nahe liegender weise unterschiedlichen Anforderungsniveaus. Im Mittelpunkt stehen dabei Aufgaben zum Leisten, weshalb die wesentliche Orientierungsgröße das Ziel „Kompetenzüberprüfung“ ist. Die Variation von Aufgaben in diesem speziellen Sinn kann somit wie folgt charakterisiert werden: Ausgangspunkt ist eine mathematische Schüleraufgabe, die für eine Kontrollarbeit vorgesehen ist. Diese Aufgabe ist geeignet, bestimmte allgemeine und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen bezogen auf bestimmte Anforderungsbereiche zu überprüfen. Durch Veränderungen (Ergänzungen, Weglassen, Modifizierung) von gegebenen oder gesuchten Größen sowie der Repräsentationsform der Aufgabe wird eine Veränderung der Anforderungsbereiche bei einzelnen mathematischen Kompetenzen oder eine Veränderung der zu überprüfenden mathematischen Kompetenzen erreicht. Die Bewertung der „Güte“ der entwickelten Aufgabe unter dem Gesamteindruck der Prüfungsaufgabe sollte hinsichtlich bedachter allgemeiner mathematischer Kompetenzen erfolgen (hilfreich könnte hierfür eine „Kompetenzmatrix“ sein, in der jedes der Felder wenigstens einmal besetzt sein sollte).

Allgemeine mathematische Kompetenzen	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen aus den Gebieten ...		
	Analysis	Analytische Geometrie	Stochastik
Probleme mathematisch lösen			
mathematisch modellieren			
mathematisch argumentieren, kommunizieren			
mathematische Darstellungen verwenden, Symbolik verwenden			

Literatur:

Bruder, R.: *Konzepte für nachhaltiges Lernen von Mathematik. Vortrag an der TU Kaiserslautern 2.2.2006*

Eid, W., u.a.: *Schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik, Kompetenzentwicklung und Aufgabenkultur, Franzbecker-Verlag 2007*